



A Matemática do *Poker*

Rafael Andrade Pereira Polesi

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em Matemática, orientado pelo Prof.º Dr. Henrique Marins de Carvalho

IFSP
São Paulo
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

Polesi, Rafael Andrade Pereira.
A Matemática do *Poker* do Curso de Licenciatura em Matemática /
Rafael Andrade Pereira Polesi. – São Paulo: IFSP, 2017.

66f

Trabalho de Conclusão do Curso Superior de Licenciatura em
Matemática – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Orientador: Henrique Marins de Carvalho

1. Matemática. 2. Ensino-Aprendizagem. 3. Probabilidade. 4. Jogos.
5. Poker. I. A Matemática do *Poker*.

RAFAEL POLESÍ

A MATEMÁTICA DO POKER

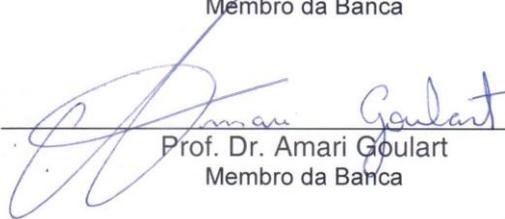
Monografia apresentada ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, em cumprimento ao requisito exigido para a obtenção do grau acadêmico de Licenciado em Matemática.

APROVADO EM 17/02/2017

CONCEITO: 10,0



Prof. Dr. Marco Aurélio Granero Santos
Membro da Banca



Prof. Dr. Amari Goulart
Membro da Banca



Prof. Dr. Henrique Marins de Carvalho
Orientador



Aluno: Rafael Polesi

“Chegar a um denominador comum

Dá as coordenadas

Aparar as arestas

Sair pela tangente

Ver de outro ângulo

Retidão de caráter

O xis da questão

O círculo íntimo

A esfera do poder

Possibilidades infinitas

Perdas incalculáveis

Numa fração de segundos

No meio do caminho

Encontramos: semelhança,

equivalência, estrutura,

função, categoria”

Às noites que viraram dias...

Ao inalcançável...

Ao infinito...

Ao tempo...

Ao fim...

AGRADECIMENTOS

Meus mais sinceros agradecimentos a todos que participaram de algum momento da minha formação, todos que de algum modo influenciaram diretamente, indiretamente ou psicologicamente.

A minha mãe Ivonete e aos meus tios Milton e Estelita, que sempre me deram forças e todo o apoio necessário para seguir sempre em frente, obrigado por serem meus exemplos e minhas inspirações para a vida.

Aos meus irmãos Deise e Diego, e ao meu primo Victor, que sempre me apoiaram em todos os momentos difíceis e deram forças para recomeçar quando preciso.

Aos colegas de curso que tive o prazer de conhecer e compartilhar boas experiências e muitos risos, mesmo nos momentos mais difíceis. Agradeço muito a Anderson Ferreira, Anderson Gonçalves, Arnaldo Agre, Douglas Januário, Fernando Manholer, Jorge, Leandro Zeferino, Luciano Nunes, Marcos Afonso, Orlando Alves, Phelipe Thome, Polion Barboza, Sergio Rocha, Willian Rocha.

Um agradecimento especial aos amigos que tive oportunidade de criar durante o curso, e que foram essenciais para a conclusão desta difícil jornada, Ana Olivia, Daniella de Paula, Douglas Takasu, Felipe Marcos, Ivan Carvalho, Jessica Leal, Misael Brito e Thais Matos.

Agradeço também a professora Alexandra Ignes e minha amiga Agnes Feltrin pela valiosa ajuda na revisão de texto.

Muito obrigado a todos os professores pela contribuição na minha vida acadêmica, em especial alguns que me marcaram, seja por uma palavra de conforto, pelo seu trabalho diferenciado, por me ensinar muito mais do que matemática ou por me proporcionar a sensação de superação, Amari Goulart, Armando Traldi, Henrique Marins, José Carlini, Iracema Arashiro, Lucas Casanova, Marco Granero, Rogério Fonseca, Samuel Francisco, Vânia Flose e Wellington Pereira.

Por fim, agradeço novamente ao Professor Henrique Marins pela orientação prestada, por estar disponível mesmo durante as férias e por todo o apoio que sempre demonstrou, e aos professores Amari Goulart e Marco Granero, por terem aceitado participar da banca e por suas contribuições.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta diferenciada para o ensino do conteúdo de probabilidade aos alunos do ensino médio, tendo como fator motivador o uso do *Poker* na modalidade *Texas Hold'em*, utilizando as regras do jogo e todas as suas fases e analisando algumas situações, simulações e jogo real. Tendo em vista que, de acordo com alguns estudos realizados no âmbito educacional, o uso do jogo como procedimento didático é relevante para o desenvolvimento cognitivo do aluno, consideramos que o *Poker* também o possa ser, inclusive, por representar situações-problemas que são determinadas pelas regras, em que o aluno, diante da estrutura do jogo, vai usar estratégias para tomar suas decisões que envolvem raciocínio, reflexão, análise e planejamento para estruturar cognitivamente a resolução do conflito.

Palavras-chaves: Matemática, Ensino-Aprendizagem, Probabilidade, Jogos, *Poker*.

ABSTRACT

This work presents a different proposal for the teaching of probability, using Poker in Texas Hold'em modality to motivate high school students, using the rules of the game and all its phases and analyzing some situations, simulations and real game. Considering that, according to some educational studies, the use of the game as a didactic procedure is relevant to the student's cognitive development, we consider that Poker can also be, as long as it represents problems-situations that are determined by rules, where the student, in regard to the structure of the game, will acquire strategies to make their decisions, which involve reasoning, reflection, analysis and planning in order to cognitively structure the solution of the conflict.

Keywords: Mathematics, Teaching-learning process, Probability, Games, *Poker*.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Naipes.	31
Figura 2 - As cinquenta e duas cartas do baralho, nosso espaço amostral.	31
Figura 3 - Exemplo de sequência real.	33
Figura 4 - Exemplo de <i>straight flush</i>	33
Figura 5 - Exemplo de quadra.	34
Figura 6 - Exemplo de <i>full house</i>	34
Figura 7 - Exemplo <i>flush</i>	35
Figura 8 - Exemplo de sequência.	35
Figura 9 - Exemplo de trinca.	36
Figura 10 - Exemplo de dois pares.	37
Figura 11 - Exemplo de par.	37
Figura 12 - Exemplo de carta alta.	38
Figura 13 - Ordem das posições.	40
Figura 14 - Mão, probabilidade Trinca.	43
Figura 15 - Flop, probabilidade Trinca.	44
Figura 16 - <i>Turn</i> , probabilidade Trinca.	45
Figura 17 - Mão, probabilidade de Sequência.	45
Figura 18 - <i>Flop</i> , probabilidade de Sequência.	46
Figura 19 - <i>Turn</i> , probabilidade de Sequência.	47
Figura 20 - Mão, probabilidade de <i>flush</i>	47
Figura 21 - <i>Flop</i> , probabilidade de <i>flush</i>	48
Figura 22 - <i>Turn</i> , probabilidade de <i>flush</i>	48
Figura 23 - Mão, simulação de jogo.	51
Figura 24 - <i>Flop</i> , simulação de jogo.	53
Figura 25 - <i>Turn</i> , simulação de jogo.	55
Figura 26 - <i>River</i> , simulação de jogo.	57

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - Vantagens e Desvantagens.	26
Quadro 2 - Aula 1.	59
Quadro 3 - Aula 2.	60
Quadro 4 - Aula 3.	61
Quadro 5 - Aula 4.	62

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Probabilidade de receber determinada mão.....	43
Tabela 2 - Probabilidade de vitória relacionada ao numero de jogadores.	49
Tabela 3 - <i>Pré-flop</i> , simulação de jogo.	52
Tabela 4 - <i>Flop</i> , simulação de jogo.	53
Tabela 5 - <i>Turn</i> , simulação de jogo.	55
Tabela 6 - <i>River</i> , simulação de jogo.	57

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	21
2. REFERENCIAL TEÓRICO	23
2.1. O USO DO JOGO COMO RECURSO PEDAGÓGICO	23
2.2. O ENSINO DE PROBABILIDADE	27
2.3. <i>POKER</i> NA UNICAMP	28
3. O <i>POKER</i>	28
3.1. MODALIDADE <i>TEXAS HOLD´EM</i>	30
3.1.1. ETAPAS DE APOSTAS.....	31
3.1.2. CLASSIFICAÇÃO DE MÃOS.....	32
3.1.3. POSIÇÕES	38
4. ATIVIDADES PROPOSTAS	40
4.1. PROBABILIDADE PRÉ- <i>FLOP</i>	40
4.2. PROBABILIDADE EM OUTRAS ETAPAS.....	43
4.3. ANÁLISE DE TABELA.....	49
4.4. SIMULAÇÃO DE UMA RODADA	51
5. PROPOSTA PEDAGÓGICA	57
5.1. AULA 1	59
5.2. AULA 2	60
5.3. AULA 3	61
5.4. AULA 4	62
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS	63
7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	65

1. INTRODUÇÃO

O fato de o *Poker* ter sido reconhecido como esporte da mente em abril de 2010, permite maior embasamento para mostrar que não se trata, em suma, de um jogo de azar, mas sim um jogo de matemática, lógica e habilidades que consiste em uma complexidade de vários outros fatores que vão muito além do azar, embora muitas pessoas ainda não saibam e o considerem um simples jogo de azar. Sendo assim, tentaremos desmistificar este pensamento que o leitor possa ter.

A proposta deste trabalho surgiu após tomar conhecimento que um professor de matemática da escola *George Mason High School* ensinava matemática para os alunos utilizando o *Poker*. Ao pesquisar mais sobre o assunto é possível perceber que esse não era um caso isolado, na Universidade *Harvard* e no *Massachusetts Institute of Technology* também já existiam atividades relacionada ao *Poker* e à educação.

Este trabalho objetiva dar o suporte necessário para que o aluno tenha um raciocínio matemático no desenvolvimento de suas atividades cotidianas podendo, assim, entender alguns padrões que podem estar por trás de determinados problemas e os transformar em sistemas, para uma resolução mais simples e eficaz. Com todos os incautos e adversidades de uma sala de aula, deve-se buscar algo que prenda a atenção dos alunos e, jogos lúdicos com atividades diferenciadas que não fujam do objetivo de ensinar, podem ser eficaz e despertar o prazer dos alunos em aprender.

Queremos deixar bem claro que nosso objetivo neste trabalho não é de incentivar apostas, muito menos tentar tornar algum de nossos alunos um jogador de *Poker*, e sim apenas utilizar esta modalidade de esporte da mente como apoio para o ensino de probabilidade.

A Intervenção psicopedagógica é de fundamental importância nesse processo. De acordo com Piaget (1975), os jogos de regras são “a atividade lúdica do ser socializado”, neles temos uma situação-problema, uma competição e as regras impostas no jogo são, de forma paralela, as leis da sociedade e princípios morais. Sendo assim, o jogo gera possibilidade para a formação de um cidadão consciente de que seus atos podem gerar diferentes tipos de consequências.

A psicologia do desenvolvimento destaca que a brincadeira e o jogo desempenham funções psicossociais, afetivas e intelectuais básicas no processo de desenvolvimento infantil. O jogo apresenta-se como uma atividade dinâmica que vem satisfazer uma necessidade da criança dentre outras, de “movimento”, ação. (GRANDO, 2004, p.18).

O *Poker* pode ser um jogo de grande importância, pois envolve estratégias, a tomada de diferentes tipos de decisão, a análise dos erros, o discernimento de como proceder com as perdas e os ganhos, a análise da jogada dos adversários e a capacidade de mudar o seu padrão de jogo mediante as ações tomadas pelos oponentes. Todo esse processo tem uma importância fundamental para o processo de aprendizagem, racionalização, reflexão, análise, criatividade, entre outros fatores que possam vir a despertar maturidade para lidar com novas transformações que podem ocorrer em seu cotidiano. Com isso podemos notar que, no *Poker*, temos diversas estruturas que podem se caracterizar dentro de um jogo de regras, jogo esse que já foi abordado por Piaget e, paralelamente temos possibilidade de atingir boa parte do conteúdo de probabilidade do ensino básico. Então, ao conciliar o *Poker* e a matemática podemos obter um grande apoio de intervenção pedagógica.

Ter esse domínio da matemática envolvida no jogo de *Poker* é um dos fatores que fazem de um jogador de *Poker* profissional um jogador diferente dos demais e nos permite perceber de maneira bem clara o porquê de conseguirem chegar muitas vezes às últimas mesas de um torneio, considerando que este fato dificilmente poderia acontecer se o jogo fosse, em suma, de azar. Com a Federação Internacional dos Esportes da Mente (IMSA) tendo reconhecido oficialmente o *Poker* como esporte mental, este se torna formalmente um jogo de habilidade, assim como xadrez, damas e os outros esportes mentais, que também fazem parte da IMSA.

Iniciaremos mostrando as vantagens e os cuidados que devemos ter para, de fato, conseguirmos extrair o máximo de riqueza ao usar o jogo de forma correta, gerando um facilitador no processo de aprendizagem. Posteriormente faremos um breve histórico do *Poker* juntamente com suas regras. Então, para quem nunca teve contato com esse jogo anteriormente, não haverá problema para seguir a leitura. Em seguida abordaremos o conteúdo matemático presente no jogo, fazendo algumas atividades, simulações, análise em diferentes etapas do jogo e, por fim apresentaremos nossa proposta pedagógica.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Quando abordamos e conciliamos aprendizado, Matemática e jogo, de certo modo, é quase inevitável não mencionarmos Regina Célia Grandó e seu livro “O jogo e a matemática no contexto da sala de aula”, obra que trata com consistência e riqueza pedagógica este assunto da Educação Matemática. Tendo em vista esse fato, utilizá-la-emos como um dos nossos pilares para sustentação teórica, juntamente com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

2.1. USO DO JOGO COMO RECURSO PEDAGÓGICO

Segundo Grandó (2004) o jogo é um facilitador no processo de ensino-aprendizagem; faz parte do universo infantil e sua prática pode se estender ao longo da vida. Pensando propriamente na infância, é possível observar que as crianças têm gosto por brincadeiras e jogos, ficando motivadas durante a interação proporcionada por essas atividades, podendo passar horas brincando. Tendo em vista o gosto pela brincadeira, é possível entender que conciliar jogos com educação pode deixar o aprendizado mais “leve” e divertido, fazendo com que o estudo caminhe junto com brincadeiras e com que certas crenças sobre o aprender sejam desconstruídas.

Por vezes, alimentam-se as crenças de que o estudo representa uma ruptura com sua vida anterior à escola, sendo assim um empecilho para a brincadeira e que as atividades lúdicas, entre elas o jogo, por sua vez, entram como um prêmio por bom comportamento, fato este que podemos presenciar facilmente hoje em dia.

Grandó (2004) Avançando para a fase escolar, seria um ganho aprender a partir de jogos, pois, por meio deles, conseguimos proporcionar ao aluno a imaginação, e, com a situação imaginária, conseguimos induzi-lo para o caminho da abstração, em que o jogo acaba, pela simulação, levando-o a buscar o uso de determinados mecanismos, sistematizações para interpretar e analisar dados, dinamizando, conseqüentemente, o ensino-aprendizagem e, muitas vezes, favorecendo um raciocínio matematizado¹ para a resolução de um desafio lúdico.

¹ Matematizar segundo a definição de Skovsmove (1994, apud, LOPES, 2008, p.62) é formular,

Segundo Grando (2004, p.18) “o jogo propicia um ambiente favorável e interessante para a criança”, não apenas pelo jogo em si, mas também por seus desafios, as regras impostas pelo jogo acabam proporcionando uma situação imaginária que pode ser considerada uma vertente para o desenvolvimento do pensamento abstrato. É de suma importância inserir as crianças em atividades que lhes proporcione o caminho que passa da imaginação para à abstração, por meio de processos hipotéticos, como reflexão e análise, a criança passa a criar estratégias diversificadas de resolução dos problemas em jogos, onde o processo de criação está diretamente ligado à imaginação.

No jogo, situação imaginária é resultado das ações com os objetos. Segundo Leontiev (1991, apud GRANDO, 2004, p.19), “não é a imaginação que determina a ação, mas são as condições da ação que tornam necessária a imaginação e dão origem a ela”. A estrutura do jogo permite que se crie uma situação lúdica imaginária, sendo que algumas situações como, por exemplo: antecipações, previsões e análises para que possam ser concedidas dependem deste processo imaginário.

Leontiev (1978, apud SANCHES, 2013, p.4), afirma que quando a criança desenvolve uma atividade, aprende com e a partir dela. Dessa forma, pode-se entender que a aplicação de uma atividade é fundamental para que o adulto e, no caso particular da sala de aula, o professor, analise as ações tomadas pelo aluno e assim tente contribuir com ações que possam desenvolver ao máximo as potencialidades e capacidades do aluno.

Grando (2004, p.21), ainda ressalta que não temos como observar um fenômeno matemático acontecendo e tentar explicar, como conseguimos na maioria dos fenômenos físicos e químicos. “A matemática existe no pensamento humano e, por isso, depende de muita imaginação para definir suas regularidades e conceitos.” Sendo assim imprescindível o uso de processos pedagógicos, dando possibilidades para que as crianças tenham momentos de atividade criadora.

As brincadeiras e jogos inicialmente são simples e com o amadurecimento da criança, vão se tornando, gradativamente, mais complexas, entretanto, de certa forma, sempre está imposta alguma regra que deve ser seguida, o que gera certa

compatibilidade em relação ao aprendizado de matemática. De acordo com Grandó (2004, p.20), “Podemos dizer que o jogo, determinado por suas regras, poderia estabelecer um caminho natural que vai da imaginação à abstração de um conceito matemático.” Desta forma o jogo acaba servindo de caráter alegórico para o desenvolvimento de um determinado conteúdo.

O planejamento no jogo de regras é definido pelas várias antecipações e construções de estratégias. Quando o aluno realiza constatações acerca de suas hipóteses, percebe regularidades e define estratégias, sendo capaz de efetuar um planejamento de suas ações, a fim de obter o objetivo final do jogo que é vencê-lo. (GRANDO, 2004, p. 23).

No nível maior de amadurecimento, com os jogos mais complexos, podemos reavaliar, com mais clareza, o aluno como jogador, que busca desenvolver suas potencialidades para conseguir vencer o jogo. De acordo com Grandó (2004, p.26), o jogo como ferramenta pedagógica apresenta um aspecto instrumentador, facilitando, assim, a aprendizagem de estruturas matemáticas que, muitas vezes, sem o apoio do jogo, seriam de difícil assimilação. Concluimos, desse modo, que o jogo é produtivo ao professor e ao aluno, pois, por meio deste instrumento, o segundo desenvolve “sua capacidade de pensar, refletir, analisar, compreender conceitos matemáticos, levantar hipóteses, testá-las e avaliá-las.” (GRANDO, 2004, p.26).

Grandó (2004, p.26), acrescenta que o professor poderá observar que, durante o jogo, por diversas vezes, as crianças, mesmo como adversárias, ajudam-se de maneira geral e, às vezes, até mesmo, apontam melhores jogadas, ou seja, compartilham estratégias, não obstante a competição, ainda que amena, permaneça, pois o objetivo maior é a socialização do conhecimento. Nesse universo lúdico, as crianças passam a discutir diferentes estratégias, podendo justificá-las, argumentar sobre elas, refletindo, assim, sobre suas próprias perspectivas em um processo de abstração.

Nos PCNs encontramos diversas ideias que reforçam e vão ao encontro da teoria desenvolvida anteriormente, portanto apresentam um viés pedagógico comum. Conseguimos dessa maneira, reforçar as conjecturas levantadas. Ainda os PCNs (2000, p.52), ao criarmos situações desafiadoras ao aluno, este tende a participar e questionar, elaborando ideias conjuntas, com o desenvolvimento de atividades

lúdicas, passando a se sentir desafiado pelo jogo do conhecimento e não apenas pelos adversários; fazendo com que ele desenvolva estratégias, planeje etapas, organize dados, estabeleça relações, verifique regularidades, faça uso dos erros cometidos para, assim, buscar novas alternativas, sistematize resultados, desenvolva sua capacidade de raciocínio, para que finalmente amplie sua capacidade de comunicação e argumentação.

Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favorecem a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Propiciam a simulação de situações-problema que exigem soluções vivas e imediatas, o que estimula o planejamento das ações; possibilitam a construção de uma atitude positiva perante os erros [...] (BRASIL, 1998, p. 46).

Não podemos deixar de fazer as devidas ligações do conteúdo para com o jogo, pois, dessa forma, podemos dar significado ao lúdico, que serve, nesse caso, como representação de uma situação matemática. Feito isso, é possível que sejam obtidos alguns outros benefícios além da correspondência matemática. O cuidado para não se fazer a utilização indevida desse recurso pedagógico é fundamental para que não seja perdida toda a estrutura psicológica e pedagógica oferecida por ele. O quadro de vantagens e desvantagens elaborado por GRANDO (2004, p.31) nos ajudará nesse sentido.

VANTAGENS

- **(re)significado de conceitos** já aprendidos de uma forma motivadora para o aluno;
- **introdução e desenvolvimento de conceitos** de difícil compreensão;
- desenvolvimento de **estratégias de resolução de problemas** (desafio dos jogos);
- aprender a **tomar decisões** e saber **avaliá-las**;
- **significação** para conceitos aparentemente incompreensíveis;
- propicia o relacionamento das diferentes disciplinas (**interdisciplinaridade**);
- o jogo requer a **participação ativa do aluno** na **construção** de seu próprio **conhecimento**;
- o jogo favorece a **interação social** entre os alunos e conscientização de **trabalho em grupo**;
- a utilização dos jogos é um fator de **interesse** para os alunos;
- dentre outras coisas, o jogo favorece o desenvolvimento da **criatividade**, do **senso crítico**, da **participação**, da **competição** "sadia", da **observação**, das várias formas de uso da linguagem e do resgate do **prazer em aprender**;
- as atividades com jogos podem ser utilizadas para desenvolver habilidades de que os alunos necessitam. É útil no trabalho com alunos de diferentes níveis.
- as atividades com jogos permitem ao professor identificar e diagnosticar algumas dificuldades dos alunos.

DESVANTAGENS

- quando os jogos são mal utilizados, existe o perigo de dar ao jogo um caráter puramente aleatório, tornando-se um “apêndice” em sala de aula. Os alunos jogam e se sentem motivados apenas pelo jogo, sem saber porque jogam;
- o tempo gasto com as atividades de jogo em sala de aula é maior e, se o professor não estiver preparado, pode existir um sacrifício de outros conteúdos por falta de tempo;
- as falsas concepções de que se devem ensinar todos os conceitos através de jogos. Então as aulas, em geral, transformam-se em verdadeiros cassinos, também sem sentido algum para o aluno;
- a perda da “ludicidade” do jogo pela interferência constante do professor, destruindo a essência do jogo;
- a coerção do professor, exigindo que o aluno jogue, mesmo que ele não queira, destruindo a voluntariedade pertencente à natureza do jogo;
- a dificuldade de acesso e disponibilidade de material sobre o uso de jogos no ensino, que possam vir a subsidiar o trabalho docente.

Quadro 1 – Vantagens e Desvantagens.

Fonte: GRANDO, 2004, p.31-32.

2.2. O ENSINO DE PROBABILIDADE

O ensino de probabilidade no Brasil está previsto nos PCNs, e na BNCC, considerando que sua compreensão proporciona ao aluno o domínio da organização de dados, desenvolvendo nele um pensamento probabilístico que lhe dará ferramentas para a elaboração de estratégias para resolução de problemas e análises sobre os resultados.

Acreditamos que é necessário desenvolver uma prática pedagógica na qual sejam propostas situações em que os estudantes realizem atividades, as quais considerem seus contextos e possam observar e construir os eventos possíveis, por meio de experimentação concreta, de coleta e organização de dados. (LOPES, 2008, p.58).

A BNCC (2016, p.569), orienta que as noções de probabilidade já consolidada no ensino fundamental se amplia no ensino médio com novos tipos de eventos, uma vez que “eventos com e sem reposição consolidam o trabalho com probabilidade de eventos dependentes e independentes”, devam ser ampliadas posteriormente com a introdução de uma visão de espaço amostral como conjunto, idealizando que o conjunto de elementos satisfazem o experimento aleatório.

Usando representações de conjuntos, podemos enriquecer os problemas de probabilidade que envolvam a união de eventos, isto é, a união dos resultados favoráveis. O trabalho com a ideia de eventos sucessivos amplia a discussão de eventos com e sem reposição, bem como a ideia de probabilidade condicional. (BRASIL, 2016, p.569).

Segundo os PCNs (2000, p.44), ideias de probabilidade utilizadas em fenômenos naturais e do cotidiano, são aplicações da Matemática relacionadas ao mundo real que se tornaram complexas, havendo um grande crescimento do uso de técnicas e raciocínios probabilísticos assim como estatísticos, e são, sem dúvida fundamentais para diversos ramos das ciências.

Podemos concluir esta ideia utilizando o PCN+ (2002, p.127), que explicita que este tema contempla várias competências relativas à contextualização sociocultural, como análise de situações reais, contribuindo também para a compreensão de representações gráficas, identificação de regularidades, interpretação e uso de modelos matemáticos e o desenvolvimento de raciocínio matemático.

2.3. POKER NA UNICAMP

No Brasil temos como principal referência o uso do *Poker* em sala de aula no currículo da Universidade Estadual de Campinas (Unicamp), na disciplina eletiva “Fundamentos do Pôquer”, ministrada pelo pós-doutor em matemática aplicada Cristiano Torezzan. Este professor considera que as habilidades e competências são necessárias para o bom desenvolvimento do jogo podem ser aplicadas em diversas situações, tanto no meio profissional quanto no meio pessoal do aluno, buscando como objetivos compreender o *Poker* como jogo de estratégia baseado em tomadas de decisão e estudo de padrões e o estudo de fundamentos matemáticos perante a decisões no jogo.

Não queremos formar jogadores de pôquer, mas pessoas que vão liderar projetos e equipes. Essas pessoas têm que tomar decisões baseadas em um conjunto de informações que elas controlam, mas existe também um conjunto de informações que elas não controlam. Chamamos isso de um cenário de informações incompletas. O resultado de uma decisão depende da interação desses dois conjuntos e essas são situações bem similares ao que acontece no pôquer. (CRISTIANO TOREZZAN, 2013)

3. O POKER

Pouco se sabe sobre o surgimento do *Poker*. De acordo com a Confederação Brasileira de *Texas Hold'em* (CBTH), entre os estudiosos do jogo o maior consenso

para o surgimento do *Poker* é de que ele é uma derivação de um jogo persa chamado “*As Nas*” que pode ter sido ensinado pelos navegadores persas aos europeus. As semelhanças entre os jogos se deve principalmente à hierarquia de combinações, como pares, trincas e a união de um par e uma trinca (posteriormente veremos que esta combinação tem um nome específico). Em relação à origem do nome, há indícios de que veio de jogos não tão semelhantes no modo de se jogar, assim como o jogo Francês “*poque*” e o jogo alemão “*pochen*”, nos quais o objetivo era “bater”. Esta é apenas uma das teorias que rodeiam historicamente o surgimento do jogo e a origem de seu nome.

De acordo com Ferreira (2007, p.12), o jogo de *Poker* moderno como conhecemos hoje surgiu no final do século XIX, após a Guerra Civil americana que permeou os anos de 1861 a 1865 e contribuiu muito para espalhar o jogo por todo o país, pelo fato de os soldados tanto do norte quanto do sul terem o jogo como passatempo preferido. Podemos afirmar esta importância, pois durante a guerra foram criadas as variantes do jogo como “*stud poker*”, “*draw*” e “*straight*”. Desde então, o jogo se tornou absolutamente popular nos Estados Unidos. Estas variantes, até o início do século XX, eram jogadas no estilo mais popular do jogo, o estilo fechado, onde todas as cartas eram ocultas, ou seja, os jogadores não viam nenhuma das cartas dos outros jogadores.

Entretanto, esse estudo dedica-se ao aprofundamento do estilo aberto, em que algumas cartas são compartilhadas para uso de todos os jogadores. Esta modalidade surgiu apenas por volta da segunda década do século XX e começou a se popularizar quando passou a ser usado para selecionar jogadores de mesas finais de campeonatos. Em 1970 ocorreu uma grande revolução no *Poker*, a criação da *World Series of Poker* (WSOP), uma espécie de campeonato mundial que acabou sendo um campeonato entre profissionais até então desconhecidos pelo público. Nos anos seguintes o evento ganhou mais popularidade devido a divulgações da mídia², o que resultou num aumento do número de inscritos e no surgimento de outros estilos de jogadores.

[...], o pôquer começou a atrair a atenção de um novo tipo de jogador; menos intuitivo, em comparação com o jogador clássico, e mais científico. O maior expoente desta espécie foi David Sklansky, autor de diversos livros

² ESPN, canal de TV fechada, passa a transmitir o campeonato.

sobre o jogo, dentre os quais *Hold'em Poker* foi o primeiro, na história, a tentar fazer uma aproximação entre o pôquer e as Ciências Matemáticas (FERREIRA, 2007, p.13).

Em meados de 1990 o *Poker* teve outra revolução histórica, passando a ganhar mais adeptos e a contar com a criação de salas *online*³ para que os usuários da rede pudessem desfrutar do jogo em qualquer momento sem precisar reunir presencialmente os amigos ou viajar para participar de algum evento, se tornando assim um dos maiores passatempos e jogos de competição. Juntamente a toda esta explosão, a modalidade *Texas Hold'em* foi a que mais cresceu e se destacou, sendo a mais jogada atualmente e, por esse motivo, essa será a modalidade analisada nesse estudo.

3.1. MODALIDADE TEXAS HOLD'EM

Como já mencionado anteriormente, o *Poker* é composto por diversas modalidades⁴ e dentro dessas modalidades podemos ter diferentes variações. No caso do *Texas Hold'em* temos as variações *Limit*, *Pot Limit* e *No Limit*, em que na primeira existe um valor máximo de aposta em cada jogada, na segunda o limite da aposta é o valor de fichas existentes no pote⁵ e na última não existe um limite estabelecido, o jogador pode apostar todas as fichas que tiver de uma só vez. Esta é a variação mais jogada hoje em dia, porém, este fator limite do pote não influencia nas regras do jogo, mas sim no valor máximo das apostas, então haverá referência apenas à modalidade em questão, sem levar em conta a sua variação.

Para jogar *Texas Hold'em*, utilizamos um baralho comum de cinquenta e duas cartas que, no estudo de probabilidade, será nosso experimento aleatório. O número de jogadores por mesa costuma variar de dois a nove, sendo que os naipes possuem a mesma equidade de força.

³ Inicialmente para computadores, porém o jogo também acompanhou a revolução tecnológica e hoje em dia é possível jogar em smartphone ou tablet, de diversos sistemas operacionais.

⁴ Destacando algumas modalidades: *Card Draw*, *Omaha*, *Razz*, *Horse*, *Hose*, *Courchevel*, *Crazy Pineapple*, *Badugi*.

⁵ O acúmulo das fichas que foram apostadas na rodada atual.



Figura 1 – Naipes.
Fonte: www.depositphotos.com

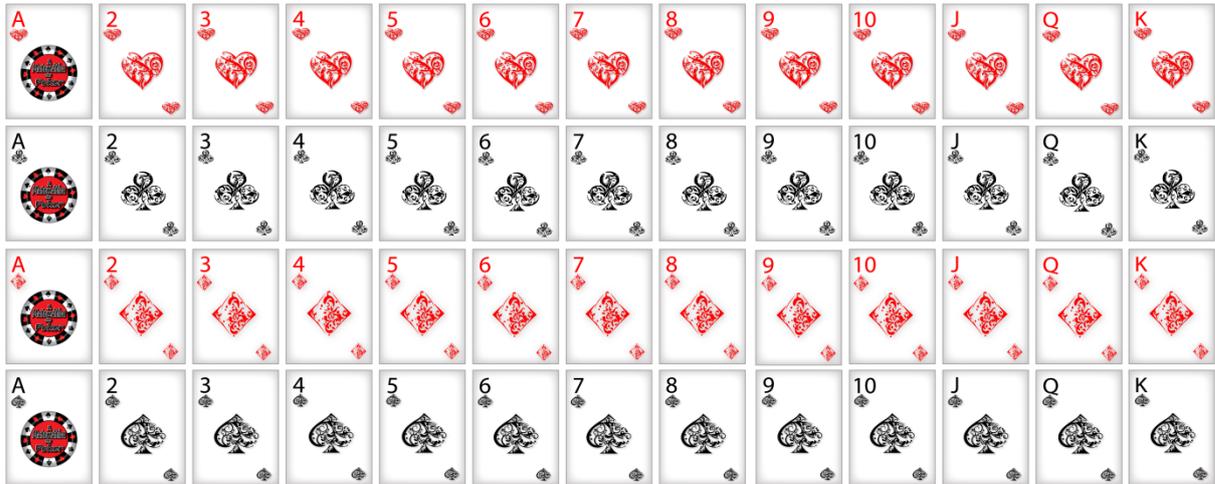


Figura 2 – As cinquenta e duas cartas do baralho, nosso espaço amostral.
Fonte: elaborado pelo autor.

3.1.1. ETAPAS DE APOSTAS

Nas etapas de apostas que acontecem em todas as rodadas do jogo, o jogador irá se deparar com um cenário incompleto em que cada etapa vai se construindo, fazendo com que o aluno tome decisões importantes, analisando não apenas as suas cartas e as cartas que estão sendo abertas, mas também o número de adversários que ainda estão dentro das apostas e suas respectivas atitudes, tentando decifrar as cartas que eles possam ter, além de tentar perceber se realmente estão jogando por valores ou se estão tentando blefar. Estas atitudes são de fundamental importância para a vitória no jogo, o que acaba resultando num aprendizado e formação para a atividade de seu cotidiano.

A distribuição das cartas e a ordem das apostas são realizadas sempre no sentido horário, sendo iniciada a partir de uma ficha de marcação denominada *dealer* que, a cada rodada, também se movimenta no sentido horário e que será abordada com mais detalhes posteriormente. A modalidade conta com cinco cartas comunitárias e duas cartas individuais que inicialmente não são reveladas aos adversários. Já as cartas comunitárias são reveladas simultaneamente para todos em algumas etapas,

nas quais o jogador poderá tomar as seguintes ações: passar (*check*), pagar a aposta (*call*), aumentar a aposta (*raise*) ou desistir (*fold*). As etapas são:

- *Pré-Flop*: na primeira etapa de apostas ainda não é revelada nenhuma carta comunitária, os jogadores precisam tomar suas ações baseados apenas nas duas cartas individuais em sua mão.
- *Flop*: na segunda etapa de apostas são reveladas as três primeiras cartas comunitárias e, assim, os jogadores precisam tomar suas ações baseados nas cartas da sua mão e nas cartas que foram abertas no *flop*.
- *Turn*: na terceira etapa de apostas é revelada a quarta carta comunitária e, mais uma vez, os jogadores devem tomar suas ações baseados em suas cartas individuais e em todas as cartas que foram abertas, no *flop* e no *turn*.
- *River*: na quarta etapa de apostas é revelada a quinta e última carta para compor a mão dos jogadores e, por fim, os jogadores tomam suas ações nesta rodada.
- *Showdown*: Caso não haja um vencedor por desistência dos adversários até a última etapa de apostas acontece o *showdown*, que consiste na abertura das cartas individuais dos jogadores que acabaram indo até o final das etapas de aposta, em que se verifica quem possui a mão mais forte ente a combinação das cartas individuais com as cartas comunitárias. Isso é decidido pela classificação de mão (*hand rankings*), que será vista a seguir. Caso exista mais de um jogador com a mesma mão vencedora, uma carta de desempate (*kicker*), que deve ser uma das duas cartas individuais, decide quem ganha. Em caso de persistência do empate o pote é dividido (*split pot*).

3.1.2. CLASSIFICAÇÃO DAS MÃOS

A classificação das mãos nada mais é que a combinação que se pode formar utilizando cinco cartas. Neste momento o interessante é retomar ou relembrar rapidamente o assunto de combinação que normalmente na escola básica é conteúdo anterior ao de probabilidade. Assim, é possível fazer uma ligação do

conteúdo que já foi ensinado com o que será apresentado, evidenciando ao aluno a conexão do aprendizado, para que possam fazer ligações ao cotidiano. A classificação será apresentada em ordem decrescente, explicando o motivo pelo qual a ordem se dá dessa forma, por meio da probabilidade de ocorrência de tal combinação acontecer, que é o total de combinações da ocorrência da mão dividido pelo total de combinações possíveis no jogo.

- Sequência Real (*Royal Straight Flush*): a combinação das cinco cartas consecutivas de maior valor do baralho e de mesmo naipe, ou seja, as cartas do dez ao ás.



Figura 3 – Exemplo de sequência real.
Fonte: elaborado pelo autor.

Para calcular a sequência real, usa-se um raciocínio intuitivo, pois só existe uma combinação de cinco cartas consecutivas de mesmo naipe do dez ao ás e, como existem quatro naipes, logo existem quatro combinações possíveis.

$$\frac{4}{C_5^{52}} = \frac{4}{\frac{52!}{5! \cdot 47!}} = \frac{4}{2598960} \cong 0,000001539$$

- *Straight Flush*: a combinação de cinco cartas consecutivas de mesmo naipe, que não seja do dez ao ás. No caso de mais de um jogador ter essa combinação, vence o jogador que a fizer com as cartas mais altas.



Figura 4 – Exemplo de *straight flush*.
Fonte: elaborado pelo autor.

O pensamento para calcular o *straight flush* é semelhante ao da sequência real, porém agora existem outras combinações: ás ao cinco, dois ao seis, três ao sete, quatro ao oito, cinco ao nove, seis ao dez, sete ao valete, oito a dama e, por fim, do nove ao rei. Sendo assim, existem nove sequências para

cada naipe, resultando num total de trinta e seis combinações.

$$\frac{4.9}{C_5^{52}} = \frac{36}{\frac{52!}{5!.47!}} = \frac{36}{2598960} \cong 0,000013852$$

- *Quadra (Four of a Kind)*: a combinação de quatro cartas de mesmo valor. No caso de mais de um jogador fazer esta combinação, vence o jogador que a fizer com as cartas mais altas.



Figura 5 – Exemplo de quadra.
Fonte: elaborado pelo autor.

Na quadra pode-se notar que existe apenas uma forma de fazer essa combinação. Como existem treze cartas de valores diferentes, faz-se a combinação e multiplica-se por treze, sem esquecer que, para formar uma mão usam-se cinco cartas. Sendo assim, a quinta carta pode ser qualquer uma das cartas que sobraram, ou seja, multiplica-se por quarenta e oito e obtém-se o total de combinações.

$$\frac{13.48}{C_5^{52}} = \frac{624}{\frac{52!}{5!.47!}} = \frac{624}{2598960} \cong 0,000240096$$

- *Full House*: a combinação formada por três cartas de mesmo valor acrescentadas a outras duas cartas de mesmo valor, ou seja, uma trinca e um par. No caso de mais de um jogador fazer esta combinação, vence o jogador que tiver a trinca mais alta. Se persistir o empate, vence quem tiver o par mais alto.



Figura 6 – Exemplo de *full house*.
Fonte: elaborado pelo autor.

Para o *full house*, sabemos que há quatro naipes e há treze cartas de cada naipe, então para formar a trinca tem-se a combinação de quatro tomados três a três multiplicados por treze. Para formar o par, este não poderá ser de cartas de mesmo valor que a trinca já formada então teremos a combinação de quatro tomados dois a dois multiplicados por doze. Enfim multiplicamos o resultado da quantidade de formações de tricás e pares.

$$\frac{13C_3^4 \cdot 12C_2^4}{C_5^{52}} = \frac{13 \cdot \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot 12 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!}}{\frac{52!}{5! \cdot 47!}} = \frac{3744}{2598960} \cong 0,001440576$$

- *Flush*: a combinação formada por cinco cartas de mesmo naipe que não sejam consecutivas. No caso de mais de um jogador fazer esta combinação, vence o jogador que a fizer com a carta mais alta.



Figura 7 – Exemplo *flush*.
Fonte: elaborado pelo autor.

Para o *Flush* tem-se a combinação dos treze valores possíveis tomados cinco a cinco, lembrando que é necessário subtrair os trinta e seis casos particulares do *straight flush* e os quatro da sequência real.

$$\frac{4 \cdot C_5^{13} - 36 - 4}{C_5^{52}} = \frac{4 \cdot \frac{13!}{5! \cdot 8!} - 36 - 4}{\frac{52!}{5! \cdot 47!}} = \frac{5108}{2598960} \cong 0,001965402$$

- Sequência (*Straight*): a combinação formada por cinco cartas em sequência de naipes diferentes. No caso de mais de um jogador fazer esta combinação, vence o jogador que a fizer com a carta mais alta.



Figura 8 – Exemplo de sequência.
Fonte: elaborado pelo autor.

Na sequência têm-se as seguintes combinações: ás ao cinco, dois ao seis, três ao sete, quatro ao oito, cinco ao nove, seis ao dez, sete ao valete, oito a dama, nove ao rei e, por fim, do dez ao ás. Sendo assim, têm-se dez sequências, porém cada carta poderá ter quatro naipes. Não podemos esquecer-nos de retirar as trinta e seis possibilidades de flush e as quatro da sequência real.

$$\frac{10 \cdot 4^5 \cdot C_5^5 - 36 - 4}{C_5^{52}} = \frac{10 \cdot 4^5 \cdot \frac{5!}{5! \cdot 0!} - 36 - 4}{\frac{52!}{5! \cdot 47!}} = \frac{10200}{2598960} \cong 0,003924647$$

- Trinca (*Three of a Kind*): a combinação de três cartas de mesmo valor. No caso de mais de um jogador fazer esta combinação, vence o jogador que a fizer com as cartas mais altas.



Figura 9 – Exemplo de trinca.
Fonte: elaborado pelo autor.

Na trinca tem-se a combinação de quatro cartas tomadas três a três multiplicado por treze conjuntos possíveis para realizar a trinca. Para completar o jogo tem-se ainda que fazer a combinação das 48 cartas restantes tomadas duas a duas, não se esquecendo de subtrair as combinações que poderiam formar pares, pois assim haveria um *full house*.

$$\frac{13C_3^4 \cdot (C_2^{48} - 12C_2^4)}{C_5^{52}} = \frac{13 \cdot \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot \left(\frac{48!}{2! \cdot 46!} - 12 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} \right)}{\frac{52!}{5! \cdot 47!}} =$$

$$= \frac{54912}{2598960} \cong 0,0211284514$$

- Dois Pares (*Two Pairs*): a combinação de duas cartas de mesmo valor e outras duas cartas de mesmo valor, ou seja, dois pares. No caso de mais de um jogador fazer essa combinação, vence o jogador que a fizer com o um par mais alto. Se persistir o empate, vence quem tiver a carta mais alta.

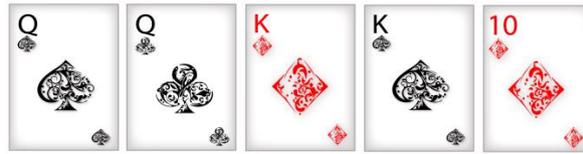


Figura 10 – Exemplo de dois pares.
Fonte: elaborado pelo autor.

Para formar dois pares tem-se a combinação de treze cartas tomadas duas a duas, o que dá um total de setenta e oito duplas distintas que podem ser formadas multiplicará com a combinação das quatro cartas de mesmo valor tomadas duas a duas, sendo esta combinação de quatro tomados dois a dois, repetida, pois se precisa de dois pares. Sendo assim, ainda resta multiplicar por quarenta e quatro possibilidades que restaram para a composição da quinta carta.

$$\frac{C_2^{13} \cdot C_2^4 \cdot C_2^4 \cdot 44}{C_5^{52}} = \frac{\frac{13!}{2! \cdot 11!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 44}{\frac{52!}{5! \cdot 47!}} = \frac{123552}{2598960} \cong 0,047539016$$

- Par (*One Pair*): a combinação de duas cartas de mesmo valor, ou seja, um par. No caso de mais de um jogador fazer esta combinação, vence o jogador que a fizer com o um par mais alto. Se persistir o empate, vence quem tiver a carta mais alta.



Figura 11 – Exemplo de par.
Fonte: elaborado pelo autor.

Para a formação de apenas um par tem-se os treze conjuntos de cartas distintas, sendo que em cada um destes conjuntos faz-se a combinação dos diferentes naipes, ou seja, combinação de quatro tomados dois a dois. Para a terceira carta tomam-se as quarenta e oito cartas que sobraram, para a quarta carta tomam-se as quarenta e quatro cartas que sobram e, enfim, para a quinta carta pega-se as quarenta cartas que sobraram. Não se pode esquecer que a ordem não importa, então divide-se a quantidade de cartas restantes pela permutação das mesmas.

$$\frac{13 \cdot C_2^4 \cdot \frac{48 \cdot 44 \cdot 40}{3!}}{C_5^{52}} = \frac{13 \cdot \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{48 \cdot 44 \cdot 40}{3!}}{\frac{52!}{5! \cdot 47!}} = \frac{1098240}{2598960} \cong 0,422569082$$

- Carta Alta (*High Card*): se não houver nenhuma combinação anterior, vence quem tiver a carta mais alta.

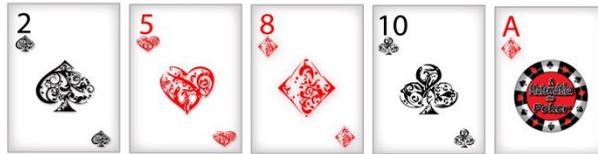


Figura 12 – Exemplo de carta alta.
Fonte: elaborado pelo autor.

A carta alta é a falta das combinações anteriores, então, de maneira simples, basta pegar o total de combinações que seria a combinação de cinquenta e dois tomados cinco a cinco e subtrair pela soma dos resultados obtidos anteriormente.

$$\frac{C_5^{52} - (4 + 36 + 624 + 3744 + 5108 + 10200 + 54912 + 123552 + 1098240)}{C_5^{52}} =$$

$$= \frac{\frac{52!}{5! \cdot 47!} - (1296420)}{\frac{52!}{5! \cdot 47!}} = \frac{1302540}{2598960} \cong 0,501177394$$

Ao apresentar a probabilidade de ocorrência da mão fica evidente que a força das mãos é classificada pela probabilidade de tal mão ocorrer, quanto menor a probabilidade da mão ocorrer maior a sua força no jogo.

3.1.3. POSIÇÕES

A relação de posição no *Poker* é um fator tão importante quanto às cartas individuais. Por se tratar de um jogo de informações incompletas, o fato de estar em uma boa posição possibilita observar as ações dos jogadores anteriores, obtendo mais informações e fazendo uma melhor análise para a tomada de decisões mais acertadas.

Em relação ao aluno, acaba auxiliando no entendimento, à medida em que ele consegue visualizar que, independente de alguns fatores serem implícitos, é de fundamental importância analisá-los para o desenvolvimento de suas estratégias. Isso permite verificar mais uma vez a complexidade e nuances de todo um sistema, ou seja, faz com que o aluno passe a desenvolver competências intelectuais, além de domínio de referenciais cognitivos.

Iniciemos falando de três posições fundamentais: o *dealer*⁶ é o último jogador a fazer sua ação; logo a sua esquerda, o *small blind* refere-se a uma aposta pequena definida pela estrutura⁷ do jogo; em seguida vem o *big blind* é obrigado a apostar o dobro da aposta mínima. Tanto o *small blind* quanto o *big blind* devem fazer essas apostas obrigatoriamente, o que é uma forma de manter a ação do jogo para que não existam rodadas em que não haja nenhum tipo de aposta. Depois desses dois, os outros jogadores terão o direito de escolher sua ação. Caso haja aumentos posteriores, tanto o *big blind* quanto o *small blind* podem decidir se pagam ou aumentam essa aposta.

- Posições Iniciais: as posições começam pelo *small blind*, logo após vem o *big blind*, seguido da posição conhecida como “*under the gun*” (UTG) e por fim o UTG+1. Estas são consideradas as piores posições para se jogar.
- Posições Intermediárias: as posições intermediárias começam a esquerda do UTG+1. Primeiro vem a *middle position* (MP), em seguida o MP+1 e, por último, o MP+2, também conhecido como *hijack*. Estas posições já são um pouco mais favoráveis, mas ainda com bastante cautela, pois faltam alguns jogadores para tomar suas ações.
- Posições Finais: as posições finais começam a esquerda do *hijack*. Primeiro vem o *cutoff* (CO), e logo após o *dealer (button)*. Estas posições são as melhores para se jogar, pois sempre permitirá analisar os adversários e poder explorá-los caso sintam fraquezas.

⁶ Jogador que distribui as cartas. Em eventos grandes existe profissionais só para fazer isso, que não participam do jogo, porém, o jogador que deveria estar distribuindo as cartas sempre está marcado com uma ficha nomeada *dealer*.

⁷ A estrutura do jogo pode variar, sendo assim os *blinds* podem ser fixos ou variáveis de forma que vai aumentando gradativamente em intervalos de tempos definidos pela estrutura do jogo.



Figura 13 – Ordem das posições
Fonte: elaborado pelo autor.

4. ATIVIDADES PROPOSTAS

Neste capítulo serão mostradas algumas atividades possíveis de serem realizadas em sala de aula abordando conteúdos de probabilidade presentes no Ensino Médio.

4.1. PROBABILIDADE PRÉ-FLOP

Nesta atividade apresentaremos alguns experimentos aleatórios, a fim de se obter probabilidades de tais eventos na fase *pré-flop* sendo que, neste momento, já é possível introduzir mais um conceito de probabilidade: a união de eventos.

- Chances de receber a mão AA⁸: lembrando que usamos um baralho completo, ou seja, o experimento aleatório possui cinquenta e duas cartas, e sabemos que o baralho tem quatro ases. Então, para calcular a probabilidade basta, para a primeira carta, pegar o total de ases e dividir pelo total de cartas do baralho. Isso gera a probabilidade de se pegar um às. Para receber o outro, basta multiplicar pelo restante dos ases e dividir pelo restante das cartas.

$$\frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{12}{2652} \cong 0,004524887 \cong 0,45\%$$

Esta conta é exatamente a mesma para qualquer outro par. Sendo assim, para receber um par de reis, também há uma probabilidade de

⁸ Usaremos as seguintes denominações: A= às, K= rei, Q= dama, J= valete, sendo assim AA é uma dupla de às.

aproximadamente 0,45%. Neste momento é possível mostrar que a união de dois eventos do mesmo espaço amostral é a soma das suas probabilidades no caso de eventos disjuntos, ou seja, a probabilidade de obtermos um par de às ou um par de reis, é a soma dos eventos. Como já foi calculado acima a probabilidade de ocorrência de cada um destes eventos, podemos somá-los, o que resulta na probabilidade de já sairmos com um par de ases ou um par de reis igual a 0,90%.

- Chances de receber a mão AKs⁹: temos os quatro ases somados com os quatro reis, o que permite oito casos favoráveis para a escolha da primeira carta, ou seja, têm-se oito dividido por cinquenta e dois e, para a segunda carta, como queremos um ás combinado com um rei de mesmo naipe, só resta uma possibilidade. Sendo assim, tem-se um dividido por cinquenta e um para a segunda carta e, multiplicando os resultados, tem-se a probabilidade de ocorrer AKs.

$$\frac{8}{52} \cdot \frac{1}{51} = \frac{8}{2652} \cong 0,003016591 \cong 0,30\%$$

- Chances de receber a mão AKo¹⁰: temos os quatro ases somados com os quatro reis, o que permite oito casos favoráveis para a escolha da primeira carta, ou seja, tem-se oito dividido por cinquenta e dois, e para a segunda carta, como queremos um ás combinado com um rei de naipes distintos, restam três possibilidades. Sendo assim, têm-se três dividido por cinquenta e um para a segunda carta e, multiplicando os resultados, tem-se a probabilidade de ocorrer AKo.

$$\frac{8}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{24}{2652} \cong 0,009049774 \cong 0,91\%$$

- Chances de receber a mão AK de qualquer naipe: temos os quatro ases somados com quatro reis, o que permite oito casos favoráveis para a escolha da primeira carta, ou seja, teremos oito dividido por cinquenta e dois, e para a segunda carta, como queremos um ás combinado com um rei de qualquer naipe, restam quatro possibilidades. Sendo assim, têm-se quatro dividido por

⁹ Duplas acompanhadas com "s" significa de mesmo naipe, Logo AKs significa às e rei de mesmo naipe.

¹⁰ Duplas acompanhadas com "o" significa de naipes distintos, Logo AKo significa às e rei de naipes distintos.

cinquenta e um para a segunda carta e, multiplicando os resultados, tem-se a probabilidade de ocorrer um AK de qualquer naipe. Ou ainda pode-se utilizar a união de eventos, basta somar a probabilidade de receber o AKs com a probabilidade de receber o AKo e, assim, tem-se a probabilidade do AK de qualquer naipe.

$$\frac{8}{52} \cdot \frac{4}{51} = \frac{32}{2652} \cong 0,012066365 \cong 1,21\%$$

Ou, com a união de eventos:

$$\frac{8}{2652} + \frac{24}{2652} = \frac{32}{2652} \cong 0,012066365 \cong 1,21\%$$

- Chances de receber a mão AA, KK ou AK de qualquer naipe: temos os quatro ases somados com quatro reis, o que permite oito casos favoráveis para a escolha da primeira carta, ou seja, têm-se oito dividido por cinquenta e dois, e para a segunda carta, como queremos um ás ou um rei de qualquer naipe, restam sete possibilidades. Sendo assim, têm-se sete dividido por cinquenta e um para a segunda carta e, multiplicando os resultados, tem-se a probabilidade de ocorrer AA, KK ou AK de qualquer naipe. Ou ainda pode-se utilizar a união de eventos, basta somar a probabilidade de receber o AA, com a probabilidade de receber o KK, com a probabilidade de receber o AK de qualquer naipe e, assim, tem-se a probabilidade de sair o AA, KK ou AK de qualquer naipe.

$$\frac{8}{52} \cdot \frac{7}{51} = \frac{56}{2652} \cong 0,021116139 \cong 2,11\%$$

Ou, com a união de eventos:

$$\frac{12}{2652} + \frac{12}{2652} + \frac{32}{2652} = \frac{56}{2652} \cong 0,021116139 \cong 2,11\%$$

- Chances de receber duas cartas de mesmo naipe: para a primeira carta obtém-se qualquer uma das cinquenta e duas cartas. Sendo assim, tem-se um evento certo, cinquenta e dois dividido por cinquenta e dois. Já na segunda carta, como é necessário receber o mesmo naipe da primeira carta,

tem-se doze dividido por cinquenta e um e, multiplicando os resultados, tem-se a probabilidade ocorrer duas cartas de mesmo naipe.

$$\frac{52}{52} \cdot \frac{12}{51} = \frac{12}{51} \cong 0,235294118 \cong 23,53\%$$

Chances de Receber a mão...	Probabilidade
AA	0,45%
AA ou KK	0,90%
AK de mesmo naipe	0,30%
AK de naipes diferentes	0,91%
AK de qualquer naipe	1,21%
AA, KK ou AK de qualquer naipe	2,11%
Duas cartas de mesmo naipe	23,53%

Tabela 1 – Probabilidade de receber determinada mão.
Fonte: elaborado pelo autor.

4.2. PROBABILIDADE EM OUTRAS ETAPAS

Nesse ponto serão calculadas algumas probabilidades de eventos, obtendo-se a probabilidade de tais eventos serem favoráveis no *flop*, *turn* e *river*. Neste momento pode-se apresentar ao aluno a probabilidade condicional.

- Para calcular a probabilidade de se obter pelo menos uma trinca, iniciando com um par na mão:



Figura 14 – Mão, probabilidade Trinca.
Fonte: elaborado pelo autor.

Como há um par na mão, calcula-se qual seria a probabilidade de se obter, até o *river*, pelo menos uma trinca. Vale lembrar que podem ser formados

outros jogos mais fortes que a trinca, os quais também serão contabilizados, pois mesmo que sejam formados, a trinca também seria formada. Existe o caso, também, de se conseguir alguns jogos mais fortes sem formar a trinca, porém estes jogos não serão contabilizados.

Neste caso há duas formas para formar a trinca utilizando as cartas da mão. A primeira seria formar a trinca com apenas uma das duas damas que restam. Assim, multiplica-se dois pela combinação de outras quarenta e oito cartas tomadas quatro a quatro. Soma-se este resultado com a segunda forma, que seria sair exatamente as duas damas, ou seja, um multiplicado pela combinação de quarenta e oito tomados três a três, divide-se o resultado da soma pelo numero de elementos em questão, que neste caso seria subtraído as duas cartas que estão em nossas mãos, restando cinquenta cartas, e como deseja-se verificar a probabilidade de a trinca sair até no *river*, combina-se estas cinquenta cartas tomadas cinco a cinco.

$$\frac{2 \cdot C_4^{48} + 1 \cdot C_3^{48}}{C_5^{50}} = \frac{2 \cdot \frac{48!}{4! \cdot 44!} + 1 \cdot \frac{48!}{3! \cdot 45!}}{\frac{50!}{5! \cdot 45!}} = \frac{406456}{2118760} \cong 0,191836735 \cong 19,18\%$$



Figura 15 – Flop, probabilidade Trinca.
Fonte: elaborado pelo autor.

Ao receber o *flop*, caso ele não seja favorável, a possibilidade de retirar a trinca diminui bastante, o que faz necessário um novo cálculo da probabilidade que ainda resta.

Para formar a trinca restam duas damas. Assim, multiplica-se dois pela combinação de outras quarenta e cinco cartas tomadas uma a uma e soma-se com a probabilidade de sair as duas damas que, no caso, é um já que só restam duas cartas para serem reveladas, dividido pelo espaço amostral em

questão, que neste caso seria subtraído as cartas que já apareceram que da um total de quarenta e sete, como nos falta apenas o *turn* e *river*, combinam-se estas quarenta e sete cartas tomadas duas a duas.

$$\frac{2 \cdot C_1^{45} + 1}{C_2^{47}} = \frac{2 \cdot 45 + 1}{\frac{47!}{2! \cdot 45!}} = \frac{91}{1081} \cong 0,084181314 \cong 8,42\%$$



Figura 16 – *Turn*, probabilidade Trinca.
Fonte: elaborado pelo autor.

O *turn* também não foi favorável. Para calcular a probabilidade do *river* é simples, basta dividir as cartas que se quer pelas cartas que ainda restam no baralho, ou seja, dois dividido por quarenta e seis, o que resulta em uma probabilidade de 4,35%.

- Para calcular a probabilidade de se obter pelo menos uma sequência de às a dez, iniciando com AJo:¹¹



Figura 17 – Mão, probabilidade de Sequência.
Fonte: elaborado pelo autor.

Como há um AJo na mão, calcula-se qual seria a probabilidade de se obter, até o *river*, pelo menos uma sequência. Vale lembrar que podem ser formados outros jogos mais fortes que a sequência, os quais também serão contabilizados, pois mesmo que sejam formados, a sequência também seria formada. Existe o caso, também, de se conseguir alguns jogos mais fortes sem formar a sequência, porém estes jogos não serão contabilizados.

¹¹ Neste momento podemos também abordar a noção de probabilidade condicional.

Para formar a sequência é necessário obter as seguintes cartas: rei, dama e dez, sendo que cada uma delas tem quatro possibilidades de saída, ou seja, tem-se quatro elevado ao cubo, multiplicado pela combinação de outras quarenta e sete cartas tomadas duas a duas, dividindo-se o resultado pelo número de elementos do espaço amostral em questão, que neste caso seria subtraído as duas cartas que estão nas mãos, restando cinquenta cartas, e como deseja-se verificar a probabilidade da sequência sair até o *river*, combinam-se estas cinquenta cartas tomadas cinco a cinco.

$$\frac{4^3 \cdot C_2^{47}}{C_5^{50}} = \frac{64 \cdot \frac{47!}{2! \cdot 45!}}{\frac{50!}{5! \cdot 45!}} = \frac{69184}{2118760} \cong 0,032653061 \cong 3,26\%$$



Figura 18 – *Flop*, probabilidade de Sequência.
Fonte: elaborado pelo autor.

Ao receber o *flop*, percebe-se que a sequência não foi obtida, mas a jogada foi favorável mesmo assim, pois se conseguiu duas cartas das três necessárias que faltavam, então, conseguir apenas mais uma carta. Percebe-se também que, neste caso, não existe mais a possibilidade de se formar um jogo maior que a sequência.

Para formar a sequência restam quatro cartas dez, multiplicando quatro pela combinação de outras quarenta e seis cartas tomadas uma a uma e dividindo-se o resultado pelo número de elementos do espaço amostral em questão, que neste caso seria subtraindo as cartas que já apareceram, ou seja, um total de quarenta e sete cartas. Como falta apenas o *turn* e *river*, combina-se estas quarenta e sete cartas tomadas duas a duas.

$$\frac{4 \cdot C_1^{46}}{C_2^{47}} = \frac{4 \cdot 46}{\frac{47!}{2! \cdot 45!}} = \frac{184}{1081} \cong 0,170212766 \cong 17,02\%$$



Figura 19 – Turn, probabilidade de Sequência.
Fonte: elaborado pelo autor.

Caso o *turn* não seja favorável é simples calcular a probabilidade do *river*, basta dividir as cartas que se quer pelas cartas que ainda restam no baralho, ou seja, quatro dividido por quarenta e seis, o que resulta em uma probabilidade de 8,70%.

- Para calcular a probabilidade de se obter um *flush*, iniciando com A8s:



Figura 20 – Mão, probabilidade de *flush*.
Fonte: elaborado pelo autor.

Como há um A8s na mão, calcula-se qual seria a probabilidade de obter, até o *river*, pelo menos um *flush*. Vale lembrar que podem ser formados outros jogos mais fortes que o *flush*, os quais também serão contabilizados, pois mesmo que sejam formados, o *flush* também seria formado. Existe o caso, também, de se conseguir alguns jogos mais fortes sem formar o *flush*, porém estes jogos não serão contabilizados.

Para formar um *flush* é necessário obter três cartas de ouro das onze que sobraram, ou seja, tem-se a combinação de onze tomadas três a três multiplicada pela combinação de outras quarenta e sete cartas tomadas duas a duas. Divide-se o resultado pelo número de elementos do espaço amostral em questão, que neste caso seria subtraído as duas cartas que estão nas mãos, restando cinquenta cartas, e como se deseja verificar a probabilidade de o *flush* sair até no *river*, combina-se estas cinquenta cartas tomadas cinco a cinco. Como, neste caso, se tem a maior carta do jogo, não importa se virar

mais que três cartas de ouro, pois do mesmo modo será formado o *flush*, o que garante a vitória, pois se tem a carta mais forte.

$$\frac{C_3^{11} \cdot C_2^{47}}{C_5^{50}} = \frac{11! \cdot 47!}{3! \cdot 8! \cdot 2! \cdot 45!} = \frac{178365}{2118760} \cong 0,084183673 \cong 8,42\%$$



Figura 21 – Flop, probabilidade de *flush*.

Fonte: elaborado pelo autor.

Ao receber o *flop*, percebe-se que o *flush* não foi obtido, mesmo assim a jogada foi favorável, pois se conseguiu duas cartas das três necessárias faltando, então, conseguir apenas mais uma carta. Percebe-se também que, neste caso, não é mais possível formar um jogo maior que o *flush*.

Para formar o *flush* restam nove cartas de ouros, ou seja, multiplica-se a combinação de nove cartas tomadas uma a uma pela combinação de outras quarenta e sete cartas tomadas uma a uma e divide-se o resultado pelo número de elementos do espaço amostral em questão, que neste caso seria subtraído as cartas que já apareceram, o que resulta num total de quarenta e sete. Como faltam apenas o *turn* e o *river*, combinam-se estas quarenta e sete cartas tomadas duas a duas.

$$\frac{C_1^9 \cdot C_2^{47}}{C_2^{47}} = \frac{9 \cdot 47}{47!} = \frac{423}{1081} \cong 0,391304348 \cong 39,13\%$$



Figura 22 – Turn, probabilidade de *flush*.

Fonte: elaborado pelo autor.

Caso o *turn* não seja favorável, é simples calcular a probabilidade do *river*, basta dividir as cartas que se quer pelas cartas que ainda restam no baralho, ou seja, nove dividido por quarenta e seis, o que resulta em uma probabilidade de 19,56%.

4.3. ANÁLISE DE TABELA

Nesta parte apresenta-se uma tabela para trabalhar o conceito de eventos equiprováveis, aproveitando para ilustrar que a quantidade de jogadores altera a probabilidade de vitória.

A tabela abaixo foi montada através de uma calculadora de probabilidades de *Poker*, da *Poker News*, e mostra a probabilidade de vitória em função das duas cartas da mão, considerando diferentes números de jogadores:

Mão	Número de jogadores					
	2	3	4	6	8	10
AA	85 %	74 %	64 %	49%	39 %	32 %
KK	82 %	69 %	59 %	44 %	33 %	26 %
QQ	80 %	65 %	54 %	39 %	29 %	23 %
JJ	77 %	62 %	50 %	35 %	25 %	20 %
1010	75 %	58 %	46 %	31 %	22 %	18 %
99	72 %	54 %	42 %	28 %	20 %	16 %
88	69 %	50 %	38 %	25 %	18 %	15 %
77	66 %	47 %	35 %	23 %	17 %	14 %
AK	65 %	49 %	41 %	30 %	23 %	18 %
AQ	64 %	48 %	38 %	27 %	21 %	17 %
66	63 %	44 %	32 %	21 %	16 %	14 %
AJ	63 %	47 %	37 %	26 %	20 %	16 %
A10	62 %	46 %	36 %	25 %	19 %	15 %
KQ	60 %	46 %	36 %	27 %	20 %	16 %
55	60 %	41 %	29 %	19 %	15 %	13 %
A9	59 %	43 %	33 %	22 %	16 %	13 %
KJ	59 %	44 %	34 %	25 %	19 %	15 %
A8	58 %	42 %	32 %	21 %	16 %	12 %

Tabela 2 – Probabilidade de vitória relacionada ao numero de jogadores.
Fonte: elaborado pelo autor.

É possível observar a grande diferença que há na probabilidade de vencer jogando contra apenas um adversário (dois jogadores) e jogando contra nove adversários (dez jogadores). Pode-se observar que, de fato, à medida que aumenta o número de jogadores, a probabilidade de vitória diminui devido ao fato de existirem mais etapas,

aumentando a probabilidade de se formar jogos mais fortes. Com isso, pode-se perceber que entrar em rodadas com um número menor de jogadores tendo cartas médias para fortes ou até pares baixos, gera grandes chances de vitória. Por outro lado, se as apostas estiverem altas e com muitos jogadores pagando, só vale a pena entrar na rodada se tiver cartas realmente fortes como pares de ás, reis, damas, valete, dez ou um às acompanhado com reis. Com isso, pode-se notar que mais uma variável a ser considerada ao entrar em jogadas é o número de jogadores participantes.

Os espaços amostrais equiprováveis são aqueles cujos eventos elementares têm a mesma probabilidade de ocorrer, ou seja, existe uma equidade entre os eventos. Usa-se o conceito de espaço amostral equiprovável para mostrar que, em casos de poucos jogadores, os pares baixos tem equidade se comparados com duas cartas altas. Como é possível observar na tabela na coluna de dois jogadores, o par de cinco é equiprovável ao rei acompanhado com a dama, enquanto o par de seis é equiprovável ao às acompanhado com valete. Já na coluna de quatro jogadores, observa-se que o par de seis acaba tendo uma equidade ao às acompanhado com o oito, demonstrando que, ao aumentar o número de jogadores, os pares baixos vão perdendo força, embora se consiga jogar bem contra cartas altas quando se tem poucos jogadores.

Pode-se observar também que o ás acompanhando com rei é um jogo extremamente forte. Porém, observando no decorrer das colunas de número de jogadores, percebe-se praticamente uma equidade na coluna de dois jogadores comparado ao par de sete. O mesmo ocorre na coluna de três jogadores comparado com o par de oito, na coluna de quatro jogadores comparado com o par de nove e na coluna de seis jogadores comparado com o par de dez. Isso indica mais uma vez que, quanto maior o número de jogadores, para um par formado ter mais chances é necessário que esse par seja de médio para alto, enquanto que, com poucos jogadores, um par baixo já pode jogar bem contra cartas altas.

4.4. SIMULAÇÃO DE UMA RODADA

Neste tópico será trabalhada, uma simulação de rodada genérica, ou seja, desprezando a posição dos jogadores, para analisar junto com os alunos as estatísticas de cada jogador em cada etapa do jogo. Vale ressaltar que os jogadores não conhecem as cartas dos adversários e, por este motivo, as probabilidades de vitória são independentes. É possível perceber isso claramente somando a probabilidade de vitória de cada jogador. Ao fazer isso, obtém-se um percentual superior a cem por cento, que faz com que a análise da vitória esteja baseada apenas pela mão do jogador, sem levar em conta a mão dos demais jogadores. Os cálculos das tabelas a seguir foram realizados através de um de uma calculadora de probabilidades de *Poker*, da *Poker News*.



Figura 23 – Mão, simulação de jogo.
Fonte: elaborado pelo autor.

PRÉ-FLOP	Jogador A	Jogador B	Jogador C	Jogador D
Royal Straight Flush	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Straight Flush	0,01%	0,01%	0,01%	0,02%
Four of a Kind	0,13%	0,13%	0,13%	0,84%
Full House	2,23%	2,22%	2,22%	8,52%
Flush	1,95%	1,95%	1,96%	1,94%
Straight	3,68%	5,01%	4,05%	2,35%
Three of a Kind	4,43%	4,41%	4,43%	11,71%
Two pair	22,68%	22,54%	22,65%	39,45%
One Pair	45,43%	44,71%	45,29%	35,15%
High card	19,47%	19,02%	19,25%	0,00%
VITÓRIA	24,44%	34,14%	34,10%	44,84%

Tabela 3 – *Pré-flop*, simulação de jogo.
Fonte: elaborado pelo autor.

As cartas são distribuídas e, ao analisarmos a imagem e tabela do *pré-flop*, já é possível imaginar que seria uma partida bastante equilibrada e difícil de jogar e, como já visto anteriormente, é possível verificar que do *royal straight flush* ao *four of a kind* tem-se uma probabilidade inferior a um por cento. Analisando os jogadores separadamente observa-se o seguinte:

- Jogador A: apesar de possuir um ás, tem um três como carta de desempate, o que não seria uma das melhores mãos para se jogar. É possível observar que a chance de vitória baixa por conta de estar jogando com uma carta de desempate muito baixa. Este tipo de mão só acaba jogando quando muitas pessoas da mesa não entram no jogo ou quando ninguém aumenta as apostas, pois de nada adianta ter a carta mais forte do jogo se ela veio mal acompanhada.
- Jogador B: duas cartas altas, o que proporciona boa vantagem estando em apenas quatro jogadores, essa é uma boa mão inclusive para aumentar alguns tipos de aposta.
- Jogador C: a análise deste jogador é idêntica a do jogador B e pode-se verificar isso observando a chance de vitória destes dois jogadores que são praticamente equiprováveis.

- Jogador D: um par médio já formando, sem dúvidas, um ótimo jogo inicialmente. Então, com certeza, é uma mão para apostar e pagar determinados tipos de apostas.



Figura 24 – *Flop*, simulação de jogo.
Fonte: elaborado pelo autor.

FLOP	Jogador A	Jogador B	Jogador C	Jogador D
Royal Straight Flush	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Straight Flush	0,00%	0,00%	0,09%	0,00%
Four of a Kind	0,01%	0,18%	0,09%	0,09%
Full House	2,50%	16,57%	2,46%	2,52%
Flush	0,00%	0,00%	4,05%	0,00%
Straight	1,50%	1,48%	15,66%	16,39%
Three of a Kind	6,67%	0,00%	5,91%	5,93%
Two pair	37,42%	81,76%	32,86%	33,54%
One Pair	51,82%	0,00%	38,89%	41,52%
High card	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
VITÓRIA	45,94%	62,78%	60,03%	29,42%

Tabela 4 – *Flop*, simulação de jogo.
Fonte: elaborado pelo autor.

O *flop* é revelado e percebe-se uma mudança grande, provavelmente seria uma etapa com muitas apostas mediante as cartas dos jogadores e com uma dificuldade grande para tomada de decisões. Analisando os jogadores separadamente observa-se o seguinte:

- Jogador A: acabou acertando o par de ás, mas por ter uma carta de desempate baixa deve jogar muito cauteloso dependendo das apostas e o próprio ás que saiu no *flop* vai ajudá-lo a visualizar se os adversários estão receosos com o ás ou não, o que será percebido por meio das apostas que forem realizadas.
- Jogador B: acertando os seus dois pares deixa-o tranquilo para tomar decisões, pois com os dois pares acaba se preocupando um pouco menos com o ás que surgiu no *flop*, tendo ainda uma possibilidade de 16,57% de acertar o *full house*. Este jogador pode apostar ou pagar algumas apostas sem pensar muito.
- Jogador C: acertou o ás assim como o jogador A, porém ele tem uma carta de desempate boa para competir, sem contar que esta mesma carta acabou deixando-o com uma possibilidade de 15,66% de acertar o *straight*. Então é um bom jogo para se apostar e pagar apostas também.
- Jogador D: aqui está a maior virada negativa do jogo. O *flop* foi péssimo para este jogador, qualquer carta que alguém tenha acertado do *flop* já o deixa para traz. Ele ainda tem uma possibilidade de 16,39% de acertar o *straight*, e 5,93% de acertar o *three of a kind*, mas se virar um dez acaba ficando em uma situação complicada por ter uma possibilidade de *straight* muito forte, então o mais certo é apenas passar a vez e, se surgir apostas mesmo que pequenas, o melhor é desistir desta rodada.



Figura 25 – *Turn*, simulação de jogo.
Fonte: elaborado pelo autor.

TURN	Jogador A	Jogador B	Jogador C	Jogador D
Royal Straight Flush	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Straight Flush	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Four of a Kind	0,00%	0,00%	0,00%	2,18%
Full House	0,00%	8,71%	0,00%	19,60%
Flush	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Straight	8,69%	8,68%	100,00%	8,76%
Three of a Kind	4,36%	0,00%	0,00%	69,47%
Two pair	26,00%	82,61%	0,00%	0,00%
One Pair	60,96%	0,00%	0,00%	0,00%
High card	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
VITÓRIA	20,63%	43,00%	57,32%	56,43%

Tabela 5 – *Turn*, simulação de jogo.
Fonte: elaborado pelo autor.

O *turn* é revelado e acaba dando uma possibilidade de *straight*, fazendo com que os jogadores tomem mais cuidado. Analisando os jogadores separadamente observa-se o seguinte:

- Jogador A: certamente este jogador já teria desistido, pois, mediante o que se pode analisar anteriormente as apostas seriam um pouco elevadas e, sem possuir uma carta de desempate razoável, não conseguiria se manter. Agora, surgindo uma possibilidade de *straight* possivelmente deveria desistir por estar em um jogo com três adversários e apostas elevadas, pois seria difícil analisar isso como blefe.

- Jogador B: ainda se mantém com dois pares e visualizando a possibilidade de *straight* deve tomar cuidado, mas ainda não é o momento de desistir dependendo dos valores de apostas, pois tem boa mão apesar de sua probabilidade do *full house* ter diminuído para 8,71%.
- Jogador C: acaba de completar o *straight* e, nesta rodada, sua chance de derrota é muito pequena. Então, se for o jogador que estava liderando as apostas, seria interessante mostrar um pouco de fraqueza fazendo apostas menores para passar uma falsa impressão de receio a respeito da carta que apareceu e, assim, deixar os demais jogadores menos apreensivos. No caso de estar pagando as apostas até então, o ideal é ainda não reaumentar a aposta e esperar o *river* para fazer isso, pois os outros jogadores continuarão apostando e, assim, talvez consiga ganhar mais fichas.

Jogador D: conseguiu a trinca, mas dependendo do número de jogadores que ainda restarem, a probabilidade de *straight* é alta. Sendo assim, mesmo com a trinca não deve pagar apostas muito altas dependendo na maneira com que os outros jogadores tem tomado suas ações, pois só é possível vencer o *straight* acertando a última carta e sua probabilidade de obter o *full house* é 19,60%.



Figura 26 – River, simulação de jogo.
Fonte: elaborado pelo autor.

RIVER	Jogador A	Jogador B	Jogador C	Jogador D
Royal Straight Flush	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Straight Flush	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Four of a Kind	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Full House	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Flush	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
Straight	0,00%	0,00%	100,00%	0,00%
Three of a Kind	0,00%	0,00%	0,00%	100,00%
Two pair	0,00%	100,00%	0,00%	0,00%
One Pair	100,00%	0,00%	0,00%	0,00%
High card	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
VITÓRIA	30,05%	46,45%	64,52%	53,32%

Tabela 6 – River, simulação de jogo.
Fonte: elaborado pelo autor.

No *river*, a última rodada de apostas, sai uma carta que não influencia nenhum dos jogadores, então tudo se mantém como na etapa passada. Porém, definiu a certeza do que cada um conquistou até o momento. Agora, a decisão é tomada por meio das observações que ocorreram em cada uma das etapas anteriores para que cada jogador decida o que de fato deve fazer. Nesta rodada, dificilmente não acontece a aposta de todas as fichas por pelo menos dois jogadores, então dependendo da quantidade de fichas de cada um, pode-se ter uma eliminação de pelo menos um jogador. É uma rodada muito difícil, pois havia apenas um jogador com um jogo desfavorável que poderia ter desistido mais facilmente desta rodada.

5. PROPOSTA PEDAGÓGICA

Nesse capítulo há uma proposta que considera aplicar e entrelaçar os conceitos até agora obtidos. Levando em conta o PCN+ (2002, p.126), referente à análise de dados, é notável que a matemática do ensino médio é determinante para a leitura de informações que circulam em diversos meios na sociedade na forma de tabelas, gráficos e informações de caráter estatístico. Espera-se que o aluno ultrapasse a simples leitura de informações, espera-se uma reflexão mais crítica sobre seus significados. “Assim o tema proposto deve ir além da simples descrição e

representação de dados, atingindo a investigação sobre esses dados e a tomada de decisões” (PCN+, 2002).

Antes de começar o conteúdo de probabilidade, inicia-se com a proposta de um jogo, o *Poker*, com explicação das regras e divisão da sala em grupos, a fim de proporcionar um primeiro contato com o *Poker*. Após este momento do jogo livre, há um questionamento ao aluno sobre o jogo como, por exemplo, sua compreensão das regras, se usou alguma estratégia para conseguir ganhar mais fichas, se acha que o jogo é de azar ou se há algum fator que pode ajudar a vencer e, por fim, se percebeu algo familiar com algum conteúdo já estudado. No segundo momento, faz-se uma revisão rápida sobre o conteúdo de combinatória para explicar por qual motivo a classificação de mãos é definida da forma que foi apresentada para eles no primeiro contato do jogo. No terceiro momento se introduz o conteúdo de probabilidade, sempre fazendo paralelos com o jogo. No quarto momento, volta-se a ter contato com o jogo para que os alunos utilizem o conhecimento matemático que lhes foi proporcionado, pedindo para que cada um faça anotações de suas ações, com justificativas da estratégia utilizada e análise dessa estratégia. Após estes momentos, faz-se uma sistematização dos conceitos matemáticos intrínsecos ao jogo e uma análise de algumas jogadas que surgiram.

Destacamos o seguinte trecho como apoio metodológico:

A seleção das atividades a serem propostas deve garantir espaço para a diversidade de opiniões, de ritmos de aprendizagem e outras diferenças pessoais. O aspecto desafiador das atividades deve estar presente todo o tempo, permitindo o engajamento e a continuidade desses alunos no processo de aprender. Nesse sentido, a postura do professor de problematizar e permitir que os alunos pensem por si mesmos, errando e persistindo, é determinante para o desenvolvimento das competências juntamente com a aprendizagem dos conteúdos específicos. (PCN+, 2002, p.129)

Por fim, será solicitado ao discente a elaboração de um trabalho em que se analise a matematização de qualquer outro jogo que eles achem, com o objetivo de que o aluno consiga, por si só, construir um pensamento crítico, criar conexões e perceber como se determinam os pilares, as estruturas e o desenvolvimento de algum padrão que possa ser observado em qualquer fenômeno.

5.1. AULA 1

(Pré-requisito: Combinação)

- Primeiro momento: Sem nenhum paralelo com a matemática o docente iniciaria essa aula passando as regras básicas do *Poker*, na modalidade *Texas Hold'em*, para que o discente possa entender a sistemática do jogo em si. (15 minutos)
- Segundo momento: Fazer com que o docente tenha contato com o jogo através do baralho clássico ou de software, ambos com interação entre os próprios alunos, e jogue de fato o jogo apenas usando as regras sem nenhuma aplicação matemática. (55 minutos)
- Terceiro momento: Será retomado brevemente o conteúdo de combinação para ajudar o discente a entender o porquê das posições da classificação das mãos, e assim paralelamente introduzir o novo assunto a ser ensinado, a probabilidade. (20 minutos)

AULA 1 Tema: A Matemática do Poker Série: 2º Ano do Ensino Médio Duração: 1h 30min				
Objetivos	Conteúdo	Roteiro de Aula	Recursos Empregados	Avaliação
Objetivo Geral Introduzir o jogo Objetivos Específicos Gerar questionamentos sobre o jogo	Retomar brevemente combinação Introduzir probabilidade	Apresentação da classificação de mãos, utilizando a combinação e probabilidade Discussão do porque a classificação de mão é dada desta forma. Divisão da sala em grupo e inicio o jogo	Apresentação no PowerPoint. Baralho clássico ou software Xerox da classificação de mãos	Verificar questionamentos do assunto

Quadro 2 – Aula 1.
 Fonte: elaborado pelo autor.

5.2. AULA 2

- Primeiro momento: Desta aula será feito uma breve discussão sobre a atividade com o jogo da aula passada, questionando se teria mais matemática envolvida além da já apresentada na classificação de mãos, e ainda se poderíamos utilizar-la para desenvolver de estratégias que possa nos dar mais vantagens para uma melhor evolução durante o jogo, ajudando na reflexão se seria um jogo de azar ou de habilidades. (10 minutos)
- Segundo momento: Após todas as indagações, reflexões e conjecturas formadas nos questionamentos sobre o jogo e a matemática, Iniciaremos de fato o conteúdo de probabilidade sempre fazendo paralelo com o *Poker*. (70 minutos)
- Terceiro momento: Momento para questionamentos e dúvidas, sempre prezando pelo diálogo. (10 minutos)

AULA 2 Tema: A Matemática do Poker Série: 2º Ano do Ensino Médio Duração: 1h 30min				
Objetivos	Conteúdo	Roteiro de Aula	Recursos Empregados	Avaliação
Objetivo Geral Iniciar conceitos de probabilidade Objetivos Específicos Gerar questionamentos sobre o jogo.	Probabilidade	Discussão do sobre o que acharam do jogo, se acham que tem mais matemática envolvida, se tem percebem alguma estratégia para conseguir mais fichas, se acham que o jogo é de azar ou habilidade Iniciar conceitos de probabilidade fazendo o uso do jogo como paralelo	Lousa / giz Baralho clássico	Verificar questionamentos do assunto

Quadro 3 – Aula 2.
 Fonte: elaborado pelo autor.

5.3. AULA 3

- Primeiro momento: Dar sequência ao conteúdo de probabilidade, fazendo exercícios de situações que poderiam ocorrer no decorrer do jogo e simulando diferentes tipos de jogadas nas diferentes etapas do jogo. Apresentando paralelamente determinadas estratégias no jogo onde a probabilidade pode ser aplicada, sempre usando o conhecimento e o raciocínio matemático. (80 minutos)
- Segundo momento: Discutir e ver até onde o conteúdo abordado está sendo aproveitado pelo discente. (10 minutos)

AULA 3 Tema: A Matemática do Poker Série: 2º Ano do Ensino Médio Duração: 1h 30min				
Objetivos	Conteúdo	Roteiro de Aula	Recursos Empregados	Avaliação
Objetivo Geral Continuar com conceitos de probabilidade Objetivos Específicos Fazer exercícios de situações que poderiam acontecer no jogo, simulando possíveis jogadas	Probabilidade	Fazer exercícios fazendo o uso do jogo como paralelo Fazer diversas simulações de situação do jogo em suas diferentes etapas	Lousa / giz Baralho clássico	Verificar questionamentos do assunto

Quadro 4 – Aula 3.
 Fonte: elaborado pelo autor.

5.4. AULA 4

- Primeiro momento: Após todos os tópicos introduzidos e de discutir bastante sobre estratégias atreladas ao conteúdo probabilístico e ao raciocínio matemático, por fim faremos que o discente tenha novamente o contato com o jogo, mas agora com um olhar mais analítico, podendo assim aplicar todo o conhecimento adquirido até o momento, anotando as suas jogadas a fim de justificar suas estratégia e posteriormente destacar de maneira critica suas melhores jogadas e as suas jogadas mais deficitárias. (80 minutos)
- Segundo momento: para uma maior reflexão, absorção, será proposto um trabalho para ser realizado em casa, onde o aluno terá que matematizar um jogo intendente de seu conteúdo matemático. O objetivo desta atividade é enfatizar que a matemática está presente em nosso cotidiano de diversas formas. (10 minutos)

AULA 4 Tema: A Matemática do Poker Série: 2º Ano do Ensino Médio Duração: 1h 30min				
Objetivos	Conteúdo	Roteiro de Aula	Recursos Empregados	Avaliação
Objetivo Geral Segundo momento com o jogo Objetivos Específicos Utilizar conteúdo de probabilidade para melhorar suas estratégias no jogo	Probabilidade	Separar alunos em grupo e iniciar o jogo, pedindo para os alunos fazerem anotações de suas ações e justificando a sua estratégia, destacando melhores jogadas e jogadas deficitárias Passar um trabalho para ser entregue posteriormente para os alunos matematizar algum jogo	Baralho clássico ou software Xerox da classificação de mãos	Verificar anotações dos alunos e pedir um trabalho será entregue posteriormente para matematizar algum jogo

Quadro 5 – Aula 4.
 Fonte: elaborado pelo autor.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, procurou-se justificar como o uso do *Poker* pode ser importante para o processo cognitivo do aluno, além de evidenciar que ele não é, em suma, um jogo de azar. No momento que este tema foi definido, a ideia era utilizá-lo apenas como ferramenta pedagógica, mas durante o desenvolvimento do trabalho foi possível perceber outras características muito importantes para o meio escolar que também poderiam ser utilizadas em favor do aluno como, por exemplo, o desenvolvimento de estratégias para resolução de problemas, o aprendizado para tomada de decisões e o discernimento para saber avaliá-las, além da interação social, habilidades cognitivas e vieses psicológicos importantes na formação do aluno.

Ao verificar o material de diversos livros didáticos pode-se perceber claramente que muitos exemplos e exercícios são tratados de maneira simples, sem nenhum aprofundamento como a retirada de uma carta do baralho, o lançamento de moedas e a retirada de bolas de cores distintas de uma urna. Todos estes exemplos não são vistos no dia a dia ou, se acontecem, não tem o aprofundamento necessário para ilustrar boa parte do conteúdo de probabilidade, então acaba servindo apenas como caráter ilustrativo.

Com este trabalho conclui-se que o estudo de probabilidade é de extrema importância para o uso no cotidiano e até mesmo para aplicação em outras áreas da ciência, como na biologia, finanças, *marketing*, econometria, engenharia, física, entre outros. Para se chegar a essa conclusão, foi proposta uma análise mais minuciosa do tema, passando por suas diversas etapas e construindo um pensamento estratégico que foi construído por meio de meios probabilísticos para um bom desenvolvimento do jogo, além de haver destaque também para o fato de que apenas o uso simples da probabilidade não define o bom rendimento do jogo, pois sempre é necessário estudar e avaliar os adversários, estando atento às posições e usando de forma a nos favorecer a probabilidade que não é favorável aos adversários, ou seja, até para fazer uso do blefe é necessário analisar as probabilidades, talvez não as das nossas cartas, mas a eficiência em saber analisar o pensamento do adversário pode garantir a exploração dos seus pontos fracos.

Apesar do *Poker* no estilo *Texas Hold'em* ser um jogo com regras de fácil

aprendizado, trata-se de um jogo extremamente complexo e desafiador se estudado mais a fundo. Quando apresentados ao jogo, os alunos têm a oportunidade de trabalhar junto com o professor e seus colegas para desenvolver pensamentos e estratégias não apenas de um jogo, mas de um sistema que pode ser empregado em sua vida, como observação de comportamentos, análise de riscos, construção de estratégias e tomada de decisões com um cenário incompleto, além de outras estruturas e habilidades que podem ser desenvolvidas se o jogo for apresentado da maneira correta.

Este estudo é finalizado na esperança de que outras pessoas possam utilizá-lo para a formação de alunos ou de outros professores, visando o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas que surgirão em sua vida, como um sistema que pode ser modelado e resolvido com maior facilidade, por meio da construção de estratégias e de seu pensamento crítico.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BRASIL. Secretaria da educação fundamental. **Base Nacional Curricular Comum**. Brasília: MEC / SEF, 2016. p. 559-581

BRASIL. Secretaria da educação fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** - Brasília: MEC / SEF, 1998.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEMT, 2002, p.111-144

CONFEDERAÇÃO BRASILEIRA DE TEXAS HOLD'EM. **A História do Poker**. Disponível em: <<http://www.cbth.org.br/texas-holdem>>. Acesso em: 25 set. 2016.

FERREIRA, Jeferson. **Poker sem segredo**. São Paulo, Digerati Books, 2007.

GORDON, Phil. **O livro verde do pôquer: Texas hold'em**. Tradução, Fabio Ohl. São Paulo: Marco Zero, 2007.

GRANDO, Regina Célia. **O jogo e a Matemática no contexto da sala de aula**. São Paulo: Paulus, 2004.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos da matemática elementar**. São Paulo: Atual, 3 ed. São Paulo: Atual, 1977. p. 69 -109

LOPES, Celi Espasandin, **O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores**. São Paulo: Unicamp, 2008, p. 57 – 73.

PIAGET, J. **A formação do símbolo na criança: imitação, jogo e sonho, imagem**

e representação. Rio de Janeiro: Zahar, 1975. p. 178-185

POKERNEWS. **Calculador de Probabilidades de Poker.** Disponível em: <<https://br.pokernews.com/poker-tools/poker-odds-calculator.htm>>. Acesso em: 17 jul. 2016.

SANCHEZ, Débora B. da Silva. **A psicologia histórico-cultural e a educação infantil.** São Paulo: Revista científica eletrônica de pedagogia, 2004, disponível em: <http://faef.revista.inf.br/imagens_arquivos/arquivos_destaque/XQiORzQItNNPo47_2013-6-5-15-40-19.pdf> Acesso em: 8 ago. 2016.

TORREZAN, Cristiano. 2013. **Fundamentos do Pôquer.**

Disponível em: <<http://www.unicamp.br/unicamp/clipping/2013/08/21/unicamp-adota-o-poquer-como-disciplina-para-ensinar-negocios?language=pt-br>> Acesso em: 14 out. 2016.